複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造 (部分多様体の微分幾何学の深化)

AUTHOR(S):

入江, 博; 酒井, 高司; 田崎, 博之

CITATION:

入江, 博 ...[et al]. 複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造 (部分多様体の微分幾何学の深化). 数理解析研究所講究録 2014, 1880: 100-116

ISSUE DATE:

2014-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/195634

数理解析研究所講究録
第1880巻2014年100-116

複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造

東京電機大学・未来科学部 入江 博 (Hiroshi Iriyeh)
School of Science and Technology for Future Life,
Tokyo Denki University
首都大学東京大学院・理工学研究科 酒井高司 (Takashi Sakai)
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University
筑波大学・数理物質系数学域 田崎博之 (Hiroyuki Tasaki)
Division of Mathematics,
Faculty of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1 Introduction

Kähler 多様体において対合的反正則等長変換による固定点集合の一つの連結成分として与えられる部分多様体を実形と呼ぶ．定義から，実形は全測地的な Lagrange 部分多様体になる．田崎 [10] および田中-田崎 [8, 9] はコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉の構造を調べ，次を示した．

定理 1.1 ([10], [8], [9]). L_1 と L_2 はともにコンパクト型 Hermite 対称空間 $M_{\mathbb{C}}$ の実形であり，横断的に交わっているとする．このとき，L_1 と L_2 の交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 および L_2 の対蹠集合になる．さらに，L_1 と L_2 が互いに合同であるならば，$L_1 \cap L_2$ は L_1 および L_2 の大対蹠集合になる．

コンパクト対称空間 M の部分集合 A は，各点 $x \in A$ における点対称 s_x によって A のすべての点が固定されるとき M の対蹠集合と呼ばれる．対蹠集合は M の有限部分集合になる．対蹠集合のとりうる最大基数を M の 2-number と呼び，$\#_2 M$ と表す．基数が 2-number を実現するような M の対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ．これらの概念は Chen-長野 [2] によって導入された．

連結コンパクト半単純 Lie 群の随伴表現の軌道を複素旗多様体と呼ぶ．複素旗多様体 $M_{\mathbb{C}}$ に対してある整数 $k_0 \geq 2$ が存在して，$k \geq k_0$ なる任意の整数 k について $M_{\mathbb{C}}$ に k 対称空間の構造を定めることができる．Sánchez [5], Berndt-Console-Fino [1] はこの対称性を用いて複素旗多様体の一般化された対蹠集合を考え，その性質と基数について調べた．

The first author was partly supported by the Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (No. 24740049), JSPS. The second author was partly supported by the Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (No. 23740057), JSPS. The third author was partly supported by the Grant-in-Aid for Science Research (C) 2012 (No. 24540064), JSPS.

本稿ではまず複素旗多様体の対蹠集合の構造について述べる．各点 $x \in M_{\mathbb{C}}$ における k 対称空間としての点対称による固定点集合を記述し，これが $k \geq k_0$ に依存しないことを示す．これにより，極大対蹠集合は Weyl 群の軌道になり，特にすべての極大対蹠集合は互いに共役であることが示される．複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 内の部分空間の系列の集合として与えられる旗多様体は複素旗多様体の重要な例である．この複素旗多様体には実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 内の部分空間の系列の集合として与えられる実旗多様体が実形として埋め込まれている．4 節ではこの複素旗多様体における二つの実旗多様体の交叉を記述し，横断的に交わるならば交叉は極大対蹠集合になることを示す．これは定理 1.1 の旗多様体への自然な拡張になる．

2　複素旗多様体と実旗多様体

ここでは Lie 群の岩澤分解を用いて複素旗多様体に不変複素構造が入ることを示し，実旗多様体が複素旗多様体に実形として埋め込まれることを示す．

$\mathfrak{g}$ をコンパクト因子を持たない実半単純 Lie 環とし，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とする．$\mathfrak{g}$ の各単純イデアル上その Killing 形式の正の定数倍に一致し，単純イデアル同士は直交するような $\mathfrak{g}$ の非退化内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をとる．$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{p}$ 上正定値になり，これによって $\mathfrak{p}$ を Euclid 空間とみなす．$\mathfrak{g}$ を Lie 環に持つ中心が有限群になる連結 Lie 群 G をとる．G はコンパクト因子を持たない連結実半単純 Lie 群になる．$\mathfrak{k}$ に対応する G の解析的部分群を K で表すと，K はコンパクトになり，(G, K) は非コンパクト型対称対になる．G の随伴表現 Ad による K の $\mathfrak{p}$ への作用は等長的になる．0 でない元 $H' \in \mathfrak{p}$ の $\mathrm{Ad}(K)$ 軌道 $M' := \mathrm{Ad}(K)H'$ を実旗多様体 (または R 空間) と呼ぶ．

$$K_{H'} := \{k \in K \mid \mathrm{Ad}(k)H' = H'\}$$

とおくと，M' は $K/K_{H'}$ と微分同型になる．

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

とおくと，$\mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形になる．ここで，G が複素化 $G^{\mathbb{C}}$ を持つ場合を考える．例えば，$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とすれば G は複素化 $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ を持つ．$\mathfrak{u}$ に対応する $G^{\mathbb{C}}$ の解析的部分群を U で表すと，U は連結コンパクト半単純 Lie 群になる．一般に，連結コンパクト半単純 Lie 群の随伴表現の軌道を複素旗多様体という．したがって，$H := \sqrt{-1}H' \in \sqrt{-1}\mathfrak{p} \subset \mathfrak{u}$ とおくと，$M_{\mathbb{C}} := \mathrm{Ad}(U)H$ は複素旗多様体である．

$$U_H := \{u \in U \mid \mathrm{Ad}(u)H = H\}$$

とおくと，$M_{\mathbb{C}}$ は U/U_H と微分同型になる．また，

$$U^* = \{(u,u) \mid u \in U\}$$

とおくと，$(U \times U, U^*)$ はコンパクト型 Riemann 対称対になる．U の随伴表現の軌道はこの対称対の線形イソトロピー表現の軌道と等長的になる．さらにこのコンパクト型 Riemann 対称対の非コンパクト型双対の線形イソトロピー表現の軌道と等長的になる．したがって，複素旗多様体は実旗多様体になる．

ここで，$\mathrm{Ad}(K)$ の作用を複素化して $M := \mathrm{Ad}(K)H$ とおくと，$M = \sqrt{-1}M'$ であるから M は実旗多様体とみなすことができ，$K \subset U$ より $M_{\mathbb{C}} = \mathrm{Ad}(U)H$ の部分多様体になる．このように実旗多様体は複素旗多様体の部分多様体になる．この部分多様体としての性質を述べるために G と $G^{\mathbb{C}}$ の岩澤分解を用いる．

$\mathfrak{g}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が定める $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型およびその複素化をともに θ で表す．H' を含む $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ をとり，$\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{h}$ をとる．$\mathfrak{h}$ は θ 不変になり，したがって $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ とおくと

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$$

は直和分解になる．さらに，$\mathfrak{h}$ の複素化 $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環になる．$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ の双対空間 $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ の元 α に対して

$$\mathfrak{g}^{\alpha} := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [T, X] = \alpha(T)X \text{ for } T \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\}$$

と定め，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のルート系 Δ を

$$\Delta := \{\alpha \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}^{\alpha} \neq \{0\}\}$$

と定める．このとき $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

とルート空間分解される．

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}$$

とおくと，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ に関するルートは $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 上実数値になり，したがって Δ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の双対空間 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の部分集合とみなせる．Δ の基本系をとり，正ルート全体の集合を Δ^+ と表す．$\alpha \in \Delta$ に対して

$$\alpha^{\theta}(T) := \alpha(\theta T) \qquad (T \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$$

と定めると，$\alpha^{\theta} \in \Delta$ となり，

$$\theta \mathfrak{g}^{\alpha} = \mathfrak{g}^{\alpha^{\theta}}$$

が成り立つ．

$$P_+ := \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha^{\theta} \neq \alpha\} = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha|_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}} \neq 0\},$$
$$P_- := \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha^{\theta} = \alpha\} = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha|_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{p}}} = 0\}$$

とおき,

$$\mathfrak{n} := \sum_{\alpha \in P_+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}_0 := \mathfrak{g} \cap \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{s} := \mathfrak{h}_\mathfrak{p} + \mathfrak{n}_0$$

と定める．このとき，$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ の冪零 Lie 部分環になり，$\mathfrak{n}_0$ は $\mathfrak{g}$ の冪零 Lie 部分環，$\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{g}$ の可解 Lie 部分環になる．さらに，$\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h}_\mathfrak{p} + \mathfrak{n}_0$$

と直和分解され，$\mathfrak{g}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}, \mathfrak{n}_0$ に対応する G の解析的部分群を $A_\mathfrak{p}, N$ とおくと，

$$K \times A_\mathfrak{p} \times N \to G \ ; \ (k, a, n) \mapsto kan$$

は微分同型になる．これにより $G = KA_\mathfrak{p}N$ と表すことができ，これを G の岩澤分解と呼ぶ.

次に，$G^\mathbb{C}$ の岩澤分解を与える．

$$\mathfrak{a} := \mathfrak{h}_\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$$

は $\mathfrak{u}$ の極大可換部分環になる．

$$\mathfrak{n}_+ := \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$$

とおくと，$\mathfrak{n}_+$ は $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ の冪零 Lie 部分環になり，$\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ は実 Lie 環として

$$\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \mathfrak{u} + \sqrt{-1}\mathfrak{a} + \mathfrak{n}_+$$

と直和分解される．さらに，$\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ の Lie 部分環 $\sqrt{-1}\mathfrak{a}, \mathfrak{n}_+$ に対応する $G^\mathbb{C}$ の解析的部分群を A^*, N_+ とおくと，

$$U \times A^* \times N_+ \to G^\mathbb{C} \ ; \ (u, a, n) \mapsto uan$$

は微分同型になる．これにより $G^\mathbb{C} = UA^*N_+$ と表すことができる．

G の岩澤分解より，実旗多様体 $M = \mathrm{Ad}(K)H$ は

$$\mathrm{Ad}(K)H \cong K/K_H \cong KA_\mathfrak{p}N/K_HA_\mathfrak{p}N = G/K_HA_\mathfrak{p}N$$

というもう一つの等質空間表示を持つ．同様に，複素旗多様体 $M_\mathbb{C} = \mathrm{Ad}(U)H$ は

$$\mathrm{Ad}(U)H \cong U/U_H \cong UA^*N_+/U_HA^*N_+ = G^\mathbb{C}/U_HA^*N_+$$

というもう一つの等質空間表示を持つ．U_H の Lie 環は

$$\mathfrak{u}_H = \{X \in \mathfrak{u} \mid [X, H] = 0\} = \mathfrak{a} + \mathfrak{u} \cap \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ \alpha(H) = 0}} \mathfrak{g}^\alpha$$

であり，

$$\mathrm{Lie}(U_HA^*N_+) = \mathfrak{a} + \mathfrak{u} \cap \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \alpha(H)=0}} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}) + \sqrt{-1}\mathfrak{a} + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$$
$$= \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha + \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \alpha(H)=0}} \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

となる．これは $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の放物型複素 Lie 部分環であり，$U_HA^*N_+$ は $G^{\mathbb{C}}$ の放物型複素 Lie 部分群になる．したがって，等質空間 $\mathrm{Ad}(U)H \cong G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+$ は $G^{\mathbb{C}}$ 不変な複素構造を持つ．上記の議論では H は $\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ の元である必要はなく，任意の $\mathfrak{u}$ の元に対して適用できる．

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する複素共役写像 σ は実 Lie 環の対合的自己同型写像になる．σ が $G^{\mathbb{C}}$ の自己同型写像を誘導する場合を考える．誘導される $G^{\mathbb{C}}$ の自己同型写像も σ で表す．σ は $G^{\mathbb{C}}$ の反正則自己同型写像になる．$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 内の σ による固定点集合は $\mathfrak{g}$ であるから，$G^{\mathbb{C}}$ 内の σ による固定点集合の単位連結成分は G と一致する．$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ より，$\sigma\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ が成り立つ．$\alpha \in \Delta$ に対して

$$\alpha^\sigma(T) := \overline{\alpha(\sigma T)} \qquad (T \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$$

と定めると，$\alpha^\sigma \in \Delta$ となり，

$$\sigma\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^{\alpha^\sigma}$$

が成り立つ．さらに，$\alpha \in P_+$ ならば $\alpha^\sigma \in P_+$ が成り立つち ([3], Ch.VI Lemma 3.3),

$$\alpha^\sigma(H) = \overline{\alpha(\sigma H)} = \overline{\alpha(-H)} = -\overline{\alpha(H)}.$$

したがって，σ は $\{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha(H) \neq 0\}$ および $\{\alpha \in \Delta \mid \alpha(H) = 0\}$ の置換を誘導し，

$$\sigma \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \alpha(H)\neq 0}} \mathfrak{g}^\alpha = \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \alpha(H)\neq 0}} \mathfrak{g}^\alpha$$
$$\sigma \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \alpha(H)=0}} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}) = \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \alpha(H)=0}} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha})$$

が成り立つ．よって，

$$\mathrm{Lie}(U_HA^*N_+) = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha + \sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ \alpha(H)=0}} \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

は σ 不変になる．これより対応する解析的部分群 $U_HA^*N_+$ も σ 不変になる．したがって，$\sigma : G^{\mathbb{C}} \to G^{\mathbb{C}}$ は微分同型写像

$$\sigma : G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+ \to G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+ \ ; \ gU_HA^*N_+ \mapsto \sigma(g)U_HA^*N_+$$

を誘導する．σ は $G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+$ の反正則微分同型写像になり，σ による固定点集合 $F(\sigma, G^{\mathbb{C}}/U_HA^*N_+)$ の原点を含む連結成分は $G/K_HA_{\mathfrak{p}}N$ に一致する．よって，実旗多様体は複素旗多様体の実形になる．

3　複素旗多様体の対蹠集合

この節では複素旗多様体に k 対称空間の構造を与え，それにより一般化された対蹠集合を定義する．複素旗多様体の対蹠集合の構造を定理3.2で述べる．

前節の設定と記号を引き続き用いる．$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を単純イデアルの直和に分解する．対応してルート系 Δ は

$$\Delta = \Delta_1 \sqcup \cdots \sqcup \Delta_r$$

と互いに素な既約ルート系の合併に分解される．各 Δ_i の基本系 $\alpha_{i,j}$ $(1 \leq j \leq p_i)$ を $\alpha_{i,j}(H) \geq 0$ となるようにとる．これらをすべて合せた

$$\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq p_i\}$$

は Δ の基本系になる．Δ_i の最高ルートを δ_i とする．

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{p_i} m_{i,j}\alpha_{i,j} \quad (m_{i,j} \text{ は自然数})$$

と書ける．必要なら基本系の番号をとりかえて，

$$\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r,\ q_i + 1 \leq j \leq p_i\}$$

が $\{\alpha \in \Delta \mid \alpha(H) = 0\}$ の基本系になるようにできる．

$$k_0 := \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{q_i} m_{i,j} \right\}$$

によって k_0 を定める．

$$\{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq p_i\}$$

は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の基底だから，その双対基底

$$\{H_{i,j} \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq p_i\}$$

をとれる．

$$Z := \sqrt{-1} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} H_{i,j} \in \mathfrak{a}$$

とおく．すると

$$[Z, \mathfrak{u}_H] = \{0\}$$

が成り立つ．$k \geq k_0$ に対して，

$$u_k := \exp \frac{2\pi}{k} Z \in \exp \mathfrak{a} \subset U_H \subset U$$

とおき，

$$\tau_k : U \to U \ ; \ u \mapsto u_k u u_k^{-1}$$

により U の内部自己同型写像 τ_k を定める．$u_k \in U_H$ だから，$\tau_k(U_H) = U_H$ が成り立つ．したがって τ_k は微分同型写像

$$\widetilde{\tau}_k : M_{\mathbb{C}} \to M_{\mathbb{C}} \ ; \ \mathrm{Ad}(u)H \mapsto \mathrm{Ad}(\tau_k(u))H \tag{3.1}$$

を誘導する．u_k の定義より $(\widetilde{\tau}_k)^k = 1$ となり，$k \geq k_0$ より H は $\widetilde{\tau}_k$ による孤立固定点になることが分かる．したがって，$\widetilde{\tau}_k$ は H における位数 k の点対称になり，複素旗多様体 $M_{\mathbb{C}}$ 上に k 対称空間の構造を定める．

次に $\widetilde{\tau}_k$ による固定定集合について調べる．(3.1) より $\widetilde{\tau}_k$ は $\mathfrak{u}$ の線形変換 $\mathrm{Ad}(u_k)$ の $\mathrm{Ad}(U)H$ への制限として与えられる．$\mathfrak{u}$ における $\mathrm{Ad}(u_k)$ による固定点集合は $+1$ 固有空間に他ならない．u_k の定義より，$\mathfrak{u}_H$ が $\mathrm{Ad}(u_k)$ の $+1$ 固有空間に含まれることは明らかである．$\alpha \in \Delta$ が $\alpha(H) \neq 0$ を満たしているとする．$\alpha(H) \neq 0$ をみたす $\alpha \in \Delta$ をとると，

$$\mathrm{Ad}(u_k)X = e^{\frac{2\pi}{k}\alpha(Z)}X \quad (X \in \mathfrak{g}^{\alpha})$$

となる．ある $1 \leq i \leq r$ について $\alpha \in \Delta_i$ となり，

$$\alpha = \sum_{j=1}^{p_i} n_j \alpha_{i,j}, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq |n_j| \leq m_{i,j}$$

と書ける．$\alpha(H) \neq 0$ より $n_1, \ldots, n_{q_i}$ のうち少なくとも一つは 0 ではない．さらに $\alpha > 0$ ならば任意の j について $n_j \geq 0$ であり，$\alpha < 0$ ならば任意の j について $n_j \leq 0$ である．

$$1 \leq |\alpha(Z)| = \left| \sum_{j=1}^{q_i} n_j \right| = \sum_{j=1}^{q_i} |n_j| \leq \sum_{j=1}^{q_i} m_{i,j} < 1 + \sum_{j=1}^{q_i} m_{i,j} \leq k_0$$

となり，$1 \leq |\alpha(Z)| < k_0$ を得る．したがって，$\mathrm{Ad}(u_k)$ の $+1$ 固有空間は $\mathfrak{u}_H$ と一致する．よって，$M_{\mathbb{C}}$ の $\widetilde{\tau}_k$ による固定点集合 $F(\widetilde{\tau}_k, M_{\mathbb{C}})$ は $M_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_H$ となり，$k \geq k_0$ の取り方に依存しないことがわかる．$H \in M_{\mathbb{C}}$ における点対称を $s_H := \widetilde{\tau}_k$ と表すと，$y \in M_{\mathbb{C}}$ について，$s_H(y) = y$ となるための必要十分条件は $[H, y] = 0$ である．同様に，$x \in M_{\mathbb{C}}$ における点対称を s_x と表すと，$y \in M_{\mathbb{C}}$ について，$s_x(y) = y$ となるための必要十分条件は $[x, y] = 0$ である．よって，次の定理を得る．

定理 3.1 ([4]). 各点 $x \in M_{\mathbb{C}}$ において s_x による固定点集合は

$$F(s_x, M_{\mathbb{C}}) = \{y \in M_{\mathbb{C}} \mid [x, y] = 0\}$$

となる．特に，$F(s_x, M_{\mathbb{C}})$ は $k \geq k_0$ に依らない．

複素旗多様体 $M_{\mathbb{C}}$ の部分集合 A が，任意の $x, y \in A$ について $s_x(y) = y$ をみたすとき，A を対蹠集合と呼ぶ．$M_{\mathbb{C}}$ の対蹠集合の最大基数を k-number と呼び，$\#_k M_{\mathbb{C}}$ と表す．これら定義は $k \geq k_0$ の取り方に依存しない．定理 3.1 より，$M_{\mathbb{C}}$ の対蹠集合 A によって生成される $\mathfrak{g}$ の部分空間は可換部分環になり，それを含む $\mathfrak{u}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ が存在する．よって，$A \subset M_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{t}$ となる．以上の議論により次の定理を得る．

定理 3.2 ([4]). 複素旗多様体 $M_{\mathbb{C}}$ の極大対蹠集合は $\mathfrak{u}$ のある極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ との交叉 $M_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{t}$ になる．これは $\mathfrak{u}$ の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群の軌道であり，したがって $M_{\mathbb{C}}$ のすべての極大対蹠集合は U の随伴作用によって互いに共役になる．

前節で示したように，実旗多様体 $M = \mathrm{Ad}(K)H$ は複素旗多様体 $M_{\mathbb{C}} = \mathrm{Ad}(U)H$ に実形として埋め込むことができる．実旗多様体 M の部分集合 A が $M_{\mathbb{C}}$ の対蹠集合になるとき，A を M の対蹠集合と呼ぶ．定義より，M の対蹠集合の最大基数は [6] が定義した index number $\#_I(M)$ と一致する．Sánchez [5, 6] と Berndt-Console-Fino [1] は複素旗多様体 $M_{\mathbb{C}}$ と実旗多様体 M について次を示した．

定理 3.3 ([5], [6], [1]).

$$\#_k(M_{\mathbb{C}}) = \dim H^*(M_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}_2),$$
$$\#_I(M) = \dim H^*(M, \mathbb{Z}_2).$$

これらは竹内 [7] による対称 R 空間の場合の結果の拡張になる．

4 複素旗多様体内の実旗多様体の交叉

複素旗多様体の例として，複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 内の部分空間の系列の集合のなす旗多様体を考え，この中の実旗多様体の交叉を記述する．

係数体は $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で表す．自然数 $n_1, \dots, n_r, n$ が

$$n_1 + \cdots + n_r < n$$

を満たすときに，旗多様体 $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n)$ を

$$F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{K}^n) = \left\{ (V_1, \dots, V_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} V_i \text{ は } \mathbb{K}^n \text{ の } \mathbb{K} \text{ 部分空間} \\ \dim V_i = n_1 + \cdots + n_i \\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \end{array} \right\}$$

と定める．$F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ には $SU(n)$ が推移的に作用し，$(\mathbb{C}^{n_1}, \mathbb{C}^{n_2}, \dots, \mathbb{C}^{n_1+\cdots+n_r})$ におけるイソトロピー部分群は $S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_{r+1}))$ となる．ここで，$n_{r+1} := n - (n_1 + \cdots + n_r)$ とおいた．

$x_1, \ldots, x_{r+1}$ は $n_1x_1 + \cdots n_{r+1}x_{r+1} = 0$ をみたす相異なる実数であるとして，

$$H := \mathrm{diag}(x_1\sqrt{-1}1_{n_1}, \ldots, x_{r+1}\sqrt{-1}1_{n_{r+1}}) \in \mathfrak{su}(n)$$

とおくと，

$$\{g \in SU(n) \mid \mathrm{Ad}(g)H = H\} = S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_{r+1}))$$

となり，

$$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n) \cong \frac{SU(n)}{S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_{r+1}))} \cong \mathrm{Ad}(SU(n))H$$

は微分同型になる．よって，$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ は複素旗多様体である．一方，$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ には $SO(n)$ が推移的に作用し，

$$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cong \frac{SO(n)}{S(O(n_1) \times \cdots \times O(n_{r+1}))} \cong \mathrm{Ad}(SO(n))H$$

となる．$\mathrm{Ad}(SO(n))H$ はコンパクト型対称対 $(SU(n), SO(n))$ の線形イソトロピー表現の軌道であり，したがって実旗多様体である．実部分空間を複素化することにより埋め込み

$$F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n) \subset F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{C}^n)$$

が定まる．

補題 4.1. $u \in U(n)$ に対して $z_i \in U(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ と $\mathbb{R}^n$ の正の向きの正規直交基底 $v_1, \ldots, v_n$ と $w_1, \ldots, w_n$ が存在して

$$uw_i = z_iv_i \quad (1 \leq i \leq n), \qquad \det u = z_1 \cdots z_n$$

が成り立つ．すなわち，

$$u[w_1, \ldots, w_n] = [v_1, \ldots, v_n] \begin{bmatrix} z_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & z_n \end{bmatrix}$$

となる．$z_i = \pm z_j$ のとき $i \sim j$ と定義し，この同値関係 $\sim$ によって $\{1, \ldots, n\}$ を

$$\{1, \ldots, n\} = N_1 \cup \cdots \cup N_s$$

と類別する．このとき，

$$uw = zv$$

を満たす $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトル v, w と $z \in \mathbb{C}$ に対して，ある $1 \leq a \leq s$ が存在して

$$v \in \bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbb{R}}, \qquad w \in \bigoplus_{i \in N_a} \langle w_i \rangle_{\mathbb{R}}, \qquad z = \pm z_i \ (i \in N_a)$$

が成り立つ．

証明　コンパクト対称対 $(U(n), SO(n))$ を考えることにより，

$$U(n) = SO(n)U(1)^n SO(n)$$

が成り立つことがわかる．これより，任意の $u \in U(n)$ に対してある $z_i \in U(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ と $k_1, k_2 \in SO(n)$ が存在して

$$u = k_1 \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix} k_2^{-1}.$$

この表示より $\det u = z_1 \cdots z_n$ が成り立つ．

$\mathbb{R}^n$ の標準的正規直交基底を $e_1, \ldots, e_n$ で表す．$v_i = k_1 e_i$, $w_i = k_2 e_i$ とおくと，$v_1, \ldots, v_n$ と $w_1, \ldots, w_n$ はともに $\mathbb{R}^n$ の正の向きの正規直交基底になり，

$$uw_i = uk_2 e_i = k_1 z_i e_i = z_i k_1 e_i = z_i v_i.$$

次に $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトル v, w と $z \in \mathbb{C}$ が

$$zv = uw$$

を満たすと仮定する．v, w は単位ベクトルであり u はユニタリ行列だから，$z \in U(1)$ となる．$\mathbb{R}^n$ の基底 $v_1, \ldots, v_n$ と $w_1, \ldots, w_n$ を用いて，v, w を

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n b_i w_i \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R})$$

と表す．すると

$$\sum_{i=1}^n a_i z v_i = zv = uw = u \sum_{i=1}^n b_i w_i = \sum_{i=1}^n b_i u w_i = \sum_{i=1}^n b_i z_i v_i$$

となる．ここで $v_1, \ldots, v_n$ は $\mathbb{R}^n$ の実基底であるから，$\mathbb{C}^n$ の複素基底にもなり，

$$a_i z = b_i z_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ．$v \neq 0$ より $a_{i_0} \neq 0$ となる i_0 が存在し，

$$z = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0}} z_{i_0}$$

となる．ここで，$z, z_{i_0} \in U(1)$ かつ $b_{i_0}/a_{i_0} \in \mathbb{R}$ であるから，$z = \pm z_{i_0}$ となることが分かる．$i_0 \in N_a$ となる $1 \leq a \leq s$ が存在する．このとき

$$z = \pm z_i \quad (i \in N_a)$$

である．$i \in \{1,2,\ldots,n\}\backslash N_a$ については，$z_i \neq \pm z_{i_0}$ かつ $\pm a_i z_{i_0} = a_i z = b_i z_i$ であるから，$a_i = b_i = 0$ となる．したがって，

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i \in N_a} a_i v_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i = \sum_{i \in N_a} b_i w_i$$

となり，

$$v \in \bigoplus_{i \in N_a} \langle v_i \rangle_{\mathbb{R}}, \qquad w \in \bigoplus_{i \in N_a} \langle w_i \rangle_{\mathbb{R}}$$

となることが示された．□

4.1 複素 Grassmann 多様体内の実 Grassmann 多様体

定理 4.2. $u \in U(n)$ に対して，補題4.1の通り，

$$u w_i = z_i v_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

をみたす $z_i \in U(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ と $\mathbb{R}^n$ の正の向きの正規直交基底 $v_1, \ldots, v_n$ と $w_1, \ldots, w_n$ をとる．$z_i = \pm z_j$ のとき $i \sim j$ と定義し，この同値関係 $\sim$ によって $\{1, \ldots, n\}$ を

$$\{1, \ldots, n\} = N_1 \cup \cdots \cup N_s$$

と類別する．このとき，$F_k(\mathbb{C}^n)$ において

$$F_k(\mathbb{R}^n) \cap F_k(u\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\substack{k_1 + \cdots + k_s = k \\ 0 \leq k_a \leq \# N_a (1 \leq a \leq s)}} F_{k_1}\left(\bigoplus_{i_1 \in N_1} \langle v_{i_1} \rangle_{\mathbb{R}}\right) \times \cdots \times F_{k_s}\left(\bigoplus_{i_s \in N_s} \langle v_{i_s} \rangle_{\mathbb{R}}\right)$$

が成り立つ．ただし

$$F_{k_1}(V_1) \times \cdots \times F_{k_s}(V_s) = \{x_1 \oplus \cdots \oplus x_s \mid x_i \in F_{k_i}(V_i)\ (1 \leq i \leq s)\} \subset F_k(\mathbb{C}^n)$$

である．特に，$F_k(\mathbb{R}^n)$ と $F_k(u\mathbb{R}^n)$ が横断的に交わる必要十分条件は，

$$i \neq j \implies z_i \neq \pm z_j$$

である．このとき

$$F_k(\mathbb{R}^n) \cap F_k(u\mathbb{R}^n) = \{\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \rangle_{\mathbb{C}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

となり，交叉は $F_k(\mathbb{R}^n)$ と $F_k(u\mathbb{R}^n)$ の大対蹠集合になる．この交叉は $F_k(\mathbb{C}^n)$ の大対蹠集合にもなっている．

証明　まず

$$F_k(\mathbb{R}^n)\cap F_k(u\mathbb{R}^n)\supset \bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_s=k\\ 0\leq k_a\leq \#N_a(1\leq a\leq s)}} F_{k_1}\left(\bigoplus_{i_1\in N_1}\langle v_{i_1}\rangle_{\mathbb{R}}\right)\times\cdots\times F_{k_s}\left(\bigoplus_{i_s\in N_s}\langle v_{i_s}\rangle_{\mathbb{R}}\right)$$

となることを示す．右辺が $F_k(\mathbb{R}^n)$ に含まれることは明らかであるから，$F_k(u\mathbb{R}^n)$ に含まれることを示せば十分である．$a\in\{1,\ldots,s\}$ を一つとり，$N_a=\{j_1,\ldots,j_{\#N_a}\}$ とおく．$F_{k_a}\left(\bigoplus_{i_a\in N_a}\langle v_{i_a}\rangle_{\mathbb{R}}\right)$ の任意の元は階数 k_a の $\#N_a\times k_a$ 実行列 $A\in M_{\#N_a,k_a}(\mathbb{R})$ によって

$$\langle [v_{j_1},\ldots,v_{j_{\#N_a}}]A\rangle_{\mathbb{C}}$$

と表される．このとき，

$$\begin{aligned}\langle [v_{j_1},\ldots,v_{j_{\#N_a}}]A\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle z_{j_1}[v_{j_1},\ldots,v_{j_{\#N_a}}]A\rangle_{\mathbb{C}}\\ &= \langle [z_{j_1}v_{j_1},\pm z_{j_2}v_{j_2},\ldots,\pm z_{j_{\#N_a}}v_{j_{\#N_a}}]A\rangle_{\mathbb{C}}\\ &= \langle [uw_{j_1},\pm uw_{j_2},\ldots,\pm uw_{j_{\#N_a}}]A\rangle_{\mathbb{C}}\\ &= \langle u[w_{j_1},\pm w_{j_2},\ldots,\pm w_{j_{\#N_a}}]A\rangle_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

となる．A は階数 k の $\#N_a\times k$ 実行列を全てとり得るので，上における最後の式は $F_{k_a}\left(u\left(\bigoplus_{i_a\in N_a}\langle w_{i_a}\rangle_{\mathbb{R}}\right)\right)$ の任意の元を表している．したがって，

$$F_{k_a}\left(\bigoplus_{i_a\in N_a}\langle v_{i_a}\rangle_{\mathbb{R}}\right)=F_{k_a}\left(u\left(\bigoplus_{i_a\in N_a}\langle w_{i_a}\rangle_{\mathbb{R}}\right)\right)$$

となることが分かる．よって，

$$\begin{aligned}&\bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_s=k\\ 0\leq k_a\leq \#N_a(1\leq a\leq s)}} F_{k_1}\left(\bigoplus_{i_1\in N_1}\langle v_{i_1}\rangle_{\mathbb{R}}\right)\times\cdots\times F_{k_s}\left(\bigoplus_{i_s\in N_s}\langle v_{i_s}\rangle_{\mathbb{R}}\right)\\ =&\bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_s=k\\ 0\leq k_a\leq \#N_a(1\leq a\leq s)}} F_{k_1}\left(u\left(\bigoplus_{i_1\in N_1}\langle w_{i_1}\rangle_{\mathbb{R}}\right)\right)\times\cdots\times F_{k_s}\left(u\left(\bigoplus_{i_s\in N_s}\langle w_{i_s}\rangle_{\mathbb{R}}\right)\right)\\ \subset\ & F_k(u\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

となり，

$$F_k(\mathbb{R}^n)\cap F_k(u\mathbb{R}^n)\supset \bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_s=k\\ 0\leq k_a\leq \#N_a(1\leq a\leq s)}} F_{k_1}\left(\bigoplus_{i_1\in N_1}\langle v_{i_1}\rangle_{\mathbb{R}}\right)\times\cdots\times F_{k_s}\left(\bigoplus_{i_s\in N_s}\langle v_{i_s}\rangle_{\mathbb{R}}\right)$$

となることをが示された．

逆の包含関係を示すために

$$\langle x_1, \ldots, x_k \rangle_{\mathbb{C}} \in F_k(\mathbb{R}^n) \cap F_k(u\mathbb{R}^n)$$

となる $\mathbb{R}^n$ の正規直交系 $x_1, \ldots, x_k$ をとる．$\langle x_1, \ldots, x_k \rangle_{\mathbb{C}} \in F_k(u\mathbb{R}^n)$ より $\mathbb{R}^n$ の正規直交系 $y_1, \ldots, y_k$ が存在して

$$\langle x_1, \ldots, x_k \rangle_{\mathbb{C}} = \langle uy_1, \ldots, uy_k \rangle_{\mathbb{C}}$$

が成り立つ．$x_1, \ldots, x_k$ と $uy_1, \ldots, uy_k$ はどちらも $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle_{\mathbb{C}}$ のユニタリ基底だから，ある $A \in U(k)$ が存在して

$$[x_1, \ldots, x_k]A = [uy_1, \ldots, uy_k]$$

となる．A に補題 4.1 の証明中に示したことを適用すると，$\xi_1, \ldots, \xi_k \in U(1)$ と $B_1, B_2 \in SO(k)$ が存在して

$$A = B_1 \begin{bmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_k \end{bmatrix} B_2^{-1}$$

が成り立つ．これより

$$[x_1, \ldots, x_k]B_1 \begin{bmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_k \end{bmatrix} B_2^{-1} = [uy_1, \ldots, uy_k]$$

を得る．両辺の右から B_2 をかけると

$$[x_1, \ldots, x_k]B_1 \begin{bmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_k \end{bmatrix} = [uy_1, \ldots, uy_k]B_2.$$

そこで

$$[x'_1, \ldots, x'_k] = [x_1, \ldots, x_k]B_1, \quad [y'_1, \ldots, y'_k] = [y_1, \ldots, y_k]B_2$$

とおくと，$x'_1, \ldots, x'_k$ と $y'_1, \ldots, y'_k$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交系になり，

$$[x'_1, \ldots, x'_k] \begin{bmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_k \end{bmatrix} = [uy'_1, \ldots, uy'_k].$$

よって

$$\xi_i x'_i = uy'_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

を得る．補題 4.1 より，各 i に対してある $1 \leq a \leq s$ が存在して

$$x_i' \in \bigoplus_{i_a \in N_a} \langle v_{i_a} \rangle_{\mathbb{R}}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} &\langle x_1, \dots, x_k \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle x_1', \dots, x_k' \rangle_{\mathbb{C}} \in \bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_s=k \\ 0 \leq k_a \leq \# N_a \\ (1 \leq a \leq s)}} F_{k_1}\left(\bigoplus_{i_1 \in N_1} \langle v_{i_1} \rangle_{\mathbb{R}} \right) \times \cdots \times F_{k_s}\left(\bigoplus_{i_s \in N_s} \langle v_{i_s} \rangle_{\mathbb{R}} \right) \end{aligned}$$

となり，

$$F_k(\mathbb{R}^n) \cap F_k(u\mathbb{R}^n) \subset \bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_s=k \\ 0 \leq k_a \leq \# N_a \\ (1 \leq a \leq s)}} F_{k_1}\left(\bigoplus_{i_1 \in N_1} \langle v_{i_1} \rangle_{\mathbb{R}} \right) \times \cdots \times F_{k_s}\left(\bigoplus_{i_s \in N_s} \langle v_{i_s} \rangle_{\mathbb{R}} \right).$$

したがって

$$F_k(\mathbb{R}^n) \cap F_k(u\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_s=k \\ 0 \leq k_a \leq \# N_a \\ (1 \leq a \leq s)}} F_{k_1}\left(\bigoplus_{i_1 \in N_1} \langle v_{i_1} \rangle_{\mathbb{R}} \right) \times \cdots \times F_{k_s}\left(\bigoplus_{i_s \in N_s} \langle v_{i_s} \rangle_{\mathbb{R}} \right)$$

が成り立つことがわかる．

$F_k(\mathbb{R}^n)$ と $F_k(u\mathbb{R}^n)$ は全測地的部分多様体なので，横断的に交わる必要十分条件は，離散的に交わることである．上記の $F_k(\mathbb{R}^n) \cap F_k(u\mathbb{R}^n)$ の表示式より，$F_k(\mathbb{R}^n)$ と $F_k(u\mathbb{R}^n)$ が横断的に交わる必要十分条件は，任意の $1 \leq a \leq s$ について $\# N_a = 1$ となることである．さらに，この条件は

$$i \neq j \quad \Longrightarrow \quad z_i \neq \pm z_j$$

と同値になる．このとき，

$$F_k(\mathbb{R}^n) \cap F_k(u\mathbb{R}^n) = \{ \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \rangle_{\mathbb{C}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \}$$

となり，交叉は $F_k(\mathbb{R}^n)$ と $F_k(u\mathbb{R}^n)$ の大対蹠集合になる．この交叉は $F_k(\mathbb{C}^n)$ の大対蹠集合にもなっている． □

4.2 複素旗多様体内の実旗多様体

定理 4.3. $u \in U(n)$ に対して，補題 4.1 の通り，

$$uw_i = z_i v_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

をみたす $z_i \in U(1)$ $(1 \leq i \leq n)$ と $\mathbb{R}^n$ の正の向きの正規直交基底 $v_1, \dots, v_n$ と $w_1, \dots, w_n$ をとる．$z_i = \pm z_j$ のとき $i \sim j$ と定義し，この同値関係 $\sim$ によって $\{1, \dots, n\}$ を

$$\{1, \dots, n\} = N_1 \cup \cdots \cup N_s$$

と類別する．このとき，$F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ において

$$\begin{aligned}&F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1,\dots,n_r}(u\mathbb{R}^n)\\&= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n) \mid V_i \in F_{n_1+\cdots+n_i}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1+\cdots+n_i}(u\mathbb{R}^n)\ (1 \leq i \leq r)\}\end{aligned}$$

が成り立つ．特に，$F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{n_1,\dots,n_r}(u\mathbb{R}^n)$ が横断的に交わる必要十分条件は，

$$i \neq j \quad \Longrightarrow \quad z_i \neq \pm z_j$$

である．このとき

$$\begin{aligned}&F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1,\dots,n_r}(u\mathbb{R}^n)\\&= \{(\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n_1}}\rangle_{\mathbb{C}}, \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n_1+n_2}}\rangle_{\mathbb{C}}, \dots, \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n_1+\cdots+n_r}}\rangle_{\mathbb{C}})\\&\quad \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n_1} \leq n,\ 1 \leq i_{n_1+1} < \cdots < i_{n_1+n_2} \leq n, \dots,\\&\qquad 1 \leq i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} < \cdots < i_{n_1+\cdots+n_r} \leq n,\\&\qquad \#\{i_1, \dots, i_{n_1+\cdots+n_r}\} = n_1 + \cdots + n_r\}\end{aligned}$$

となり，交叉は $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{n_1,\dots,n_r}(u\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合になる．この交叉は $F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合にもなっている．

証明

$$\begin{aligned}F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) &= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n) \mid V_i \in F_{n_1+\cdots+n_i}(\mathbb{R}^n)\ (1 \leq i \leq r)\}\\F_{n_1,\dots,n_r}(u\mathbb{R}^n) &= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n) \mid V_i \in F_{n_1+\cdots+n_i}(u\mathbb{R}^n)\ (1 \leq i \leq r)\}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1,\dots,n_r}(u\mathbb{R}^n)\\&= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1,\dots,n_r}(\mathbb{C}^n) \mid V_i \in F_{n_1+\cdots+n_i}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1+\cdots+n_i}(u\mathbb{R}^n)\ (1 \leq i \leq r)\}\end{aligned}$$

となる．ここで，$F_{n_1+\cdots+n_i}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1+\cdots+n_i}(u\mathbb{R}^n)$ は $F_{n_1+\cdots+n_i}(\mathbb{C}^n)$ における交叉であることを注意しておく．

$i \neq j$ なる i, j について $z_i \neq z_j$ となるとき，各 i について

$$\begin{aligned}&F_{n_1+\cdots+n_i}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1+\cdots+n_i}(u\mathbb{R}^n)\\&= \{\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n_1+\cdots+n_i}}\rangle_{\mathbb{C}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n_1+\cdots+n_i} \leq n\}\end{aligned}$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
&F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)\cap F_{n_1,\ldots,n_r}(u\mathbb{R}^n)\\
&=\{(\langle v_{i_1},\ldots,v_{i_{n_1}}\rangle_{\mathbb{C}},\langle v_{i_1},\ldots,v_{i_{n_1+n_2}}\rangle_{\mathbb{C}},\ldots,\langle v_{i_1},\ldots,v_{i_{n_1+\cdots+n_r}}\rangle_{\mathbb{C}})\\
&\quad \mid 1\le i_1<\cdots<i_{n_1}\le n,\ 1\le i_{n_1+1}<\cdots<i_{n_1+n_2}\le n,\ldots,\\
&\quad\ 1\le i_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}<\cdots<i_{n_1+\cdots+n_r}\le n,\\
&\quad\ \#\{i_1,\ldots,i_{n_1+\cdots+n_r}\}=n_1+\cdots+n_r\}
\end{aligned}
$$

となる. これは離散的であるから $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{n_1,\ldots,n_r}(u\mathbb{R}^n)$ は横断的である.

逆に $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{n_1,\ldots,n_r}(u\mathbb{R}^n)$ が横断的であるならば

$$
i\neq j \quad\Longrightarrow\quad z_i\neq z_j
$$

となることを示す. このために対偶を示す. ある $i\neq j$ について $z_i=\pm z_j$ である場合, $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{n_1,\ldots,n_r}(u\mathbb{R}^n)$ は横断的でないことを示せばよい. 一般性を失うことなく $z_1=\pm z_2$ と仮定してよい. このとき

$$
\begin{aligned}
&F_1(\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}})\times F_1(\langle v_3\rangle_{\mathbb{R}})\times F_1(\langle v_{n_1+1}\rangle_{\mathbb{R}})\subset F_{n_1}(\mathbb{R}^n)\cap F_{n_1}(u\mathbb{R}^n)\\
&F_1(\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}})\times F_1(\langle v_3\rangle_{\mathbb{R}})\times F_1(\langle v_{n_1+n_2+1}\rangle_{\mathbb{R}})\subset F_{n_1+n_2}(\mathbb{R}^n)\cap F_{n_1+n_2}(u\mathbb{R}^n)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&F_1(\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}})\times F_1(\langle v_3\rangle_{\mathbb{R}})\times F_1(\langle v_{n_1+\cdots+n_r+1}\rangle_{\mathbb{R}})\subset F_{n_1+\cdots+n_r}(\mathbb{R}^n)\cap F_{n_1+\cdots+n_r}(u\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

となる. したがって

$$
\begin{aligned}
&\{(\langle l,v_3,\ldots,v_{n_1+1}\rangle_{\mathbb{C}},\langle l,v_3,\ldots,v_{n_1+n_2+1}\rangle_{\mathbb{C}},\ldots,\langle l,v_3,\ldots,v_{n_1+\cdots+n_r+1}\rangle_{\mathbb{C}})\\
&\qquad \mid 0\neq l\in\langle v_1,v_2\rangle_{\mathbb{R}}\}\subset F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)\cap F_{n_1,\ldots,n_r}(u\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

となり, $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{n_1,\ldots,n_r}(u\mathbb{R}^n)$ は横断的でない. □

定理4.3および定理3.3より次の系が得られる.

系 4.4. $F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{n_1,\ldots,n_r}(u\mathbb{R}^n)$ が横断的に交わるとき, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\#(F_{n_1,\ldots,n_r}(\mathbb{R}^n)\cap F_{n_1,\ldots,n_r}(u\mathbb{R}^n)) &= \#_k(M_{\mathbb{C}})=\dim H^*(M_{\mathbb{C}},\mathbb{Z}_2)\\
&=\#_I(M)=\dim H^*(M,\mathbb{Z}_2)\\
&=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{r+1}!}.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] J. Berndt, S. Console and A. Fino, *On index number and topology of flag manifolds*, Differential Geom. Appl., **15** (2001), 81–90.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[3] S. Helgason, Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[4] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[5] C. Sánchez, *The invariant of Chen-Nagano on flag manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **118**, No.4 (1993), 1237–1242.

[6] C. Sánchez, *The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi*, Proc. Amer. Math. Soc., **125**, No.3 (1997), 893–900.

[7] M. Takeuchi, *Two-number of symmetric R-spaces*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.

[8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), no. 4, 1297–1332.

[9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[10] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.